

低信噪比下改进的频率估计器

孙 冬¹, 李 滚¹, 肖 波²

(1 电子科技大学 航空航天学院, 四川 成都 611731; 2 电子科技大学 电子科学技术研究院, 四川 成都 611731)

摘 要: 在高斯白噪声环境下, 本文提出一种新的单频信号频率估计方法. 首先将采样数据分成 M 段, 每段 K 个数据点, 然后对各段数据进行相加实现平均滤波, 最后利用 Kay 频率估计器中相位差分的方法得到单频信号的频率估计值. 该频率估计器具有较低的计算复杂度和更低的信噪比阈值, 其值为 $6-20\log(K)\text{dB}$.

关键词: 频率估计; 高斯白噪声; Kay 频率估计器; 信噪比阈值

中图分类号: TP39

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2013)11-0168-03

Improved Frequency Estimator with Low SNR Threshold

SUN Dong¹, LI Gun¹, XIAO Bo²

(1 School of Aeronautics and Astronautics, University of Electronic Science and Technology of China,

Chengdu 611731, China; 2 Research Institute of Electronic Science and Technology,

University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: A novel methodology for frequency estimation of a single complex sinusoid in complex additive white Gaussian noise is proposed in this paper. Firstly, the sampled data is divided into M segments and each segment has K data points, then, taking the average filtering for each segment, finally, we utilize different methods to estimate the frequency of received signal, which is similar to the Kay's estimator. Consequently, the results of simulation indicated that the proposed method has lower computational complexity and lower SNR threshold that is $6-20\log(K)\text{dB}$.

Key words: frequency estimation; additive white Gaussian noise; Kay's frequency estimator; SNR threshold

1 引言

噪声环境下的频率精确估计在实际应用中非常重要, 尤其是在雷达信号处理和卫星导航信号分析中. 目前频率估计方法有很多, 它们主要基于两种分析方法: 利用周期图^[1,7]获得频率估计以及信号相位差分方法^[2-6]获得信号频率的准确估计. 其中, 第一种周期图方法是基于最大似然估计思想寻找周期图中信号谱峰, 从而根据谱峰位置估计出信号的频率. 尽管利用快速傅立叶变换在一定程度上可以减少所需的算法时间, 但是在实时信号处理中, 基于谱峰位置的一维搜索仍然具有较高算法复杂度. 为了满足实时需求, Yang, Cui^[7]等提出了一些改进的周期图算法, 但在实时环境中, 总希望尽可能降低算法的复杂度. 因此, 其他的频率估计方法也应运而

生. 第二种频率估计方法是基于相位差分方法, 这种频率估计方法具有较低的算法复杂度, 并且在高信噪比情况下能逼近其克拉美罗界限. 尽管相位差分方法具有较低的算法复杂度, 但是当信号输入信噪比低于某个阈值时, 频率估计值将远远偏离其克拉美罗界限. 为了尽可能降低信噪比阈值, 一些改进的相位差分的频率估计方法被提出^[4-6]. 目前这些改进的相位差分算法很难在频率估计性能和算法复杂度之间有较好的权衡. 本文基于相位差分的思想提出了一种低信噪比下改进的频率估计器, 该算法不仅具有较好抗噪性能, 同时具有较低的算法复杂度.

2 改进的频率估计器

首先考虑这样一个单频信号, 其离散形式可以表示为:

$$x_k = Ae^{j(\omega_0 k + \theta)} + n_k, (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

其中 A 为信号幅度, ω_0 和 θ 为未知常量, 分别代表频率和初相位. n_k 表示方差为 σ_n^2 的加性复高斯白噪声. 根据文献[2], 在信号信噪比 SNR_{x_k} 满足条件 $\text{SNR}_{x_k} = A^2/\sigma_n^2 \gg 1$ 时, 式(1)可以近似表示为:

$$x_k = Ae^{j(\omega_0 k + \theta + u_k)}, (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

其中 u_k 为实高斯白噪声, 其方差为 $\sigma_u^2 \approx \frac{1}{2\text{SNR}_{x_k}}$. 基于以上的分析, 现考虑将观测信号 x_k 均匀分成 M 段, 其中每段长度为 $K = \frac{N}{M}$ (仅考虑整数情况). 将每段数据进行加权平均得:

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{1}{K} \sum_{i=(m-1)K+1}^{mK} x_i, (m = 1, 2, \dots, M) \\ &= \left| \frac{A \sin(K\omega_0/2)}{K \sin(\omega_0/2)} \right| e^{j((m-1)K+1)\omega_0 + \theta'} \\ &\quad + \frac{1}{K} \sum_{i=(m-1)K+1}^{mK} n_i \end{aligned} \quad (3)$$

式中, θ' 为一常数. 此时序列 z_m 的信噪比为:

$$\text{SNR}_{z_m} = \frac{A^2}{K\sigma_n^2} \left| \frac{\sin(K\omega_0/2)}{\sin(\omega_0/2)} \right|^2 \quad (4)$$

为保证 $\text{SNR}_{z_m} \geq \text{SNR}_{x_k}$, 需满足 $|\omega_0| < \frac{\pi}{K}$. 此时序列 z_m 相位可表示为:

$$\arg(z_m) = ((m-1)K+1)\omega_0 + \theta' + v_m \quad (5)$$

由式(2)以及文献[3]可知, 当 $\text{SNR}_{z_m} \gg 1$ 时, v_m 为方差为 $\sigma_v^2 \approx \frac{1}{2\text{SNR}_{z_m}}$ 的实高斯白噪声. 为了避免相位模糊, 对式(5)进行相位差分[3]可得:

$$\begin{aligned} p_k &= \arg(z_{k+1} z_k^*) \\ &= K\omega_0 + (v_{k+1} - v_k) (k = 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (6)$$

对式(6)重新整理可得:

$$q_k = \frac{1}{K} p_k = \omega_0 + \frac{1}{K} (v_{k+1} - v_k) \quad (7)$$

根据式(7), 得到 ω_0 的最小方差无偏估计[2]:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{K} \frac{1^T C^{-1} p}{1^T C^{-1} 1} \quad (8)$$

估计误差[2]为:

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{1}{K^2} \frac{1}{1^T C^{-1} 1} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} p &= [p_1, p_2, \dots, p_M], 1 = [1, 1, \dots, 1]^T \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

根据以上公式推导, 本文提出的改进的频率估计器可以表示为:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{M-1} w_k \arg(z_{k+1} z_k^*) \quad (11)$$

$$\text{其中 } w_k = \frac{\frac{3}{2}M}{M^2-1} \left\{ 1 - \left[\frac{k - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}} \right]^2 \right\}^{[2]}$$

在实际应用中该系数可预先计算好, 因此在实时估计中该系数为一已知数, 并不占用计算时间, 其估计误差可以表示为:

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{6}{\frac{A^2}{K\sigma_n^2} \frac{N}{K} ((\frac{N}{K})^2 - 1)} \left| \frac{\sin(\omega_0/2)}{\sin(K\omega_0/2)} \right|^2 \quad (12)$$

当 $|\omega_0| \ll \frac{\pi}{K}$ 或 $N \gg K$ 时, 有:

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) \approx \frac{6}{\left(\frac{A^2}{\sigma_n^2}\right) N(N^2 - 1)} = \sigma_{\text{CR}}^2 \quad (13)$$

综合以上讨论可知, 在满足条件 $|\omega_0| \ll \frac{\pi}{K}$ 时,

本文的频率估计器是最优的, 其估计性能可以很好的逼近克拉美罗界限. 因此, 可根据式(11)对单频信号进行频率估计. 值得注意的是, 当 $K=1$ 时, 本文的频率估计器退化成 Kay 频率估计器[2]. 因此 Kay 频率估计器可看成其一种特殊形式. 文献[3]中给出了 Kay 估计器的抗噪阈值为 6dB, 通过类比可得, 本文的频率估计器抗噪阈值为 $6 - 20\log(K)$ dB. 在算法实现方面, 由于对数据进行分段处理, 使得原来需要对相邻数据点进行相位差分, 变为 K 个数据点进行加权平均后再进行相位差分, 乘法运算量约降低 K 倍.

3 仿真计算和性能分析

为验证本文提出的频率估计器, 利用 100000 次蒙特卡罗仿真方法对估计器性能进行评判. 图 1 对频率为 $\omega_0 = 0.04\pi$ 单频信号进行了仿真, 采样点个数 $N=40$. 由图可知, 在相同的信噪比时, 随着每段长度 K 的增加, 该估计器抗噪性能逐渐变好. 在低噪声环境下, 本文的估计器可以很好的逼近卡罗美罗界限. 图中 CRB 为单频信号频率估计的克拉美罗界限. 为了对比本文估计器同其它频率估计器估计性能的优劣, 分别对信号频率 $\omega_0 = 0.01\pi$, $\omega_0 = 0.13\pi$, $\omega_0 = 0.15\pi$ 时进行了仿真对比.

图 2 给出了 $\omega_0 = 0.01\pi$ 时, Kay 频率估计器[2],

Kim 频率估计器^[3], Y.-C. Xiao 频率估计器^[4], 以及本文提出的频率估计器之间估计性能对比。由图可知, 本文提出的频率估计器在低信噪比情况下优于其它频率估计器, 尽管 Y.-C. Xiao 频率估计器具有最低的算法复杂度, 但是其频率估计性能远远低于其它的频率估计器。而本文提出的频率估计器不仅具有较低算法复杂度, 同时能更好的在低噪声环境下工作。

图 3 和图 4 分别给出了 $\omega_0 = 0.13\pi$, $\omega_0 = 0.15\pi$ 时, 以上几种频率估计器的估计性能对比。

从以上仿真可看出, 随着频率 ω_0 增加, 本文提出的频率估计器抗噪性能逐渐降低, 当 ω_0 逐渐增大至一定程度时, 本文所提出的频率估计器性能开始低于 Kim 频率估计器和 Kay 频率估计器。当 $|\omega_0| \geq \frac{\pi}{K}$ 时候, 此时出现了相位模糊, 因此不能得到正确的估计值。因此在实际应用中, 根据每段数据点数 K , 应选择待测信号频率满足 $|\omega_0| < \frac{\pi}{K}$ 这一条件。

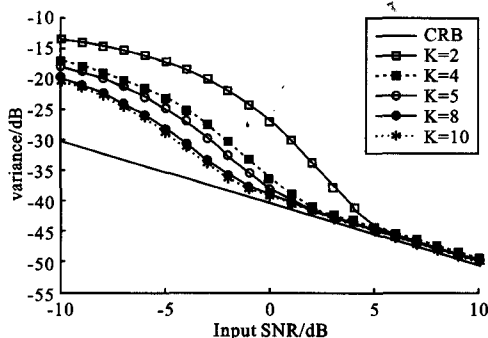


图 1 $\omega_0 = 0.04\pi$ 时, 在不同的分段长度 K 值下, 本文的估计器性能的对比

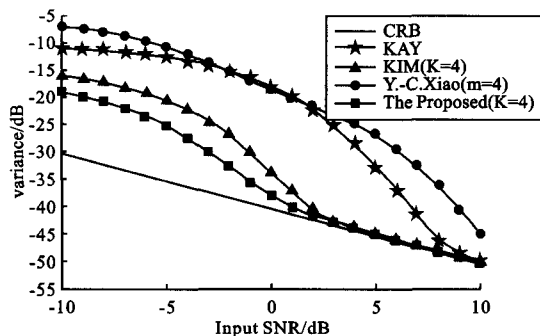


图 2 $\omega_0 = 0.01\pi$ 时, 本文的频率估计器与其他频率估计器的性能对比

4 结束语

本文基于相位差分频率估计的思想, 提出一种

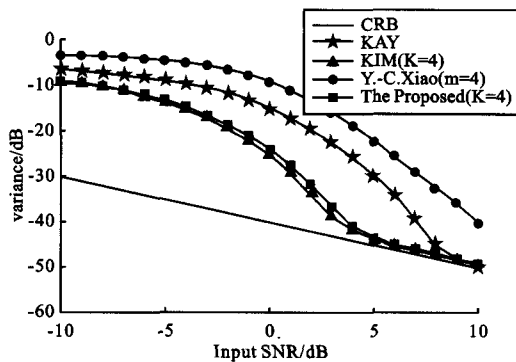


图 3 $\omega_0 = 0.13\pi$ 时, 本文的频率估计器与其他频率估计器的性能对比

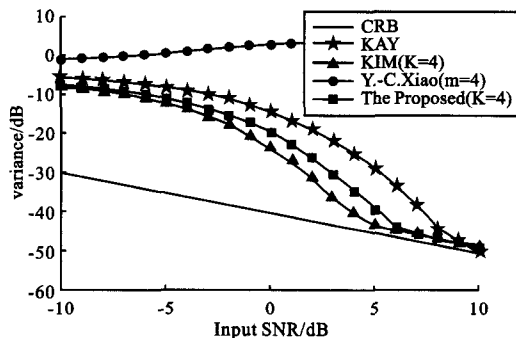


图 4 $\omega_0 = 0.15\pi$ 时, 本文的频率估计器与其他频率估计器的性能对比

在低信噪比情况下的单频信号频率估计器。先将采样数据分成若干段, 然后对各段数据进行相加实现平均滤波。为了提高该估计器的抗噪性能, 需要增大 K 值, 同时为了避免相位模糊应满足 $|\omega_0| \ll \frac{\pi}{K}$, 因此在实际应用中, 需要根据具体情况选择合适的 K 值。该频率估计器具有较低的计算复杂度和更低的信噪比阈值。在实际应用中具有重要意义, 尤其在实时信号处理中, 该算法能很好的满足实时性要求。

参考文献:

- [1] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete time observations [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, 120(5): 591-598.
- [2] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator [J]. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1989, 37: 1987-1990.
- [3] Kim D, Narasimha M J, Cox D C. An improved single frequency estimator [J]. IEEE Signal Process Letter, 1996(3): 212-214.
- [4] Xiao Y C, Wei P, Xiao X C, et al. Fast and accurate single frequency estimator [J]. Electron Lett, 2004 (40): 910-911.

(下转第 176 页)

一种有效尝试,希望能为类似研究提供参考与启发.

参考文献:

- [1] Tuhina Samanta, Raka Sardar, Hafizur Rahaman, et al. A heuristic method for obstacle avoiding group Steiner tree construction[C]//Proceedings of the International Workshop on System Level Interconnect Prediction, NY, USA: ACM, 2012: 21-21.
- [2] Laleh Behjat, Anthony Vannelli, William Rosehart. Integer linear programming models for global routing [J]. INFORMS Journal on Computing, 2006, 18(2): 137-150.
- [3] 郝春梅, 吴波. 改进型粒子群算法解决多维背包问题 [J]. 微电子学与计算机, 2012, 29(9): 129-132.
- [4] Kulkarni R V, Venayagamoorthy G K. Particle swarm optimization in wireless-sensor networks: A brief survey[J]. IEEE Trans Syst Man Cybern C, 2011, 41(2): 262-267.
- [5] Hanan M. On steiner's problem with rectilinear distance[J]. SIAM J Appl Math, 1966(14): 255-265.
- [6] Dong Chen, Wang Gaofeng, Chen Zhenyi, et al. A method of self-adaptive inertia weight for PSO[C]//Proceedings of the International Conference Computer Science and Software Engineering. Wuhan, Hubei: IEEE, 2008: 1195-1198.
- [7] Hayward H Chan, Igor L Markov. Practical slicing and non-slicing block-packing without simulated annealing[EB/OL]. [2013-02-01]. may 2004 <http://vlsicad.eecs.umich.edu/BK/CompasS>.
- [8] Dong Chen, Wang Gaofeng, Chen Zhenyi, et al. A VLSI routing algorithm based on improved DPSO

[C]//IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems. Shanghai: IEEE, 2009: 802-805.

- [9] 徐宁, 洪先龙. 超大规模集成电路物理设计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

作者简介:



董晨 女, (1979-), 博士, 讲师. 研究方向为智能优化算法、电子线路自动化设计.



陈震亦 男, (1978-), 博士, 高级工程师. 研究方向为智能计算及其应用.



尚艳艳 女, (1973-), 硕士, 讲师. 研究方向为智能优化算法、计算机系统结构.

(上接第 170 页)

- [5] Rosnes Eirik, Vahlin Anders. Frequency estimation of a single complex sinusoid using a generalized kay estimator[J]. IEEE Trans on Communications, 2006(54): 407-415.
- [6] Awoseyila A B, Kasparis C, Evans B G. Improved single frequency estimation with wide acquisition range[J]. Electron Lett, 2008(44): 245-247.
- [7] Yang Cui, Gang Wei. A noniterative frequency estimator with rational combination of three spectrum lines

[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011(59): 5065-5070.

作者简介:

孙冬 男, (1987-), 硕士研究生. 研究方向为电路与系统、应用电子技术、信号处理等.

李滚 男, (1976-), 副教授, 硕士生导师. 研究方向为时间频率测量控制、信号处理等.

肖波 男, (1987-), 硕士研究生. 研究方向为数字信号处理、雷达信号处理等.